การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ

(Integration of Rational Functions)

จุดประสงค์การเรียนรู้

นิสิตสามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะซึ่งอยู่บนพื้นฐานแนวคิดของการแบ่งฟังก์ชันออกเป็นผลบวกของฟังก์ชันพหุนามกับฟังก์ชันตรรกยะแท้และสามารถหาปริพันธ์โดยใช้เทคนิคต่างๆ ที่เคยเรียนมาแล้วได้

ฟังก์ชันตรรกยะ คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ เมื่อ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม

1. ถ้าดีกรีของ P น้อยกว่าดีกรีของ Q แล้วจะเรียกฟังก์ชัน f ว่า **ฟังก์ชันตรรกยะแท้** (proper rational function) และถ้า $Q(x)$ สามารถแยกตัวประกอบได้แล้วเราสามารถเขียน f ให้อยู่ในรูป**ผลบวกของเศษส่วนย่อย**ได้ นั่นคือ

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x)$$

เมื่อ $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... , $F_n(x)$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้

2. ถ้าดีกรีของ P มากกว่าหรือเท่ากับดีกรีของ Q จะเรียกฟังก์ชัน f ว่า **ฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้** (improper rational function) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$f(x) = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

เมื่อ $R(x)$ และ $S(x)$ เป็นพหุนาม โดยที่ดีกรีของ S น้อยกว่าดีกรีของ Q ได้โดยใช้วิธีการหารพหุนาม

■ การหาปริพันธ์โดยการเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อย

ในการเขียนให้อยู่รูปผลบวกของเศษส่วนย่อยของฟังก์ชันตรรกยะแท้และ $Q(x)$ สามารถแยกตัวประกอบได้ ทำได้ ดังนี้

1. **แยกตัวประกอบของ $Q(x)$ จนกระทั่งมีตัวประกอบอยู่ในรูปของนิพจน์ $ax+b$ หรือ ax^2+bx+c ที่ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้อีก** นั่นคือ $b^2-4ac < 0$

ดังนั้น จะได้ $Q(x)$ เป็นผลคูณของตัวประกอบซึ่งแตกต่างกันที่อยู่ในรูปของนิพจน์ $(ax+b)^m$ หรือ $(ax^2+bx+c)^m$ เช่น

2. **เขียน** $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **ให้อยู่รูปนิพจน์ของผลบวกเศษส่วนย่อย** ดังนี้

กรณี 1 ถ้าตัวประกอบของ $Q(x)$ มีนิพจน์ $(ax+b)^m$ เป็นตัวประกอบ แล้ว ผลบวกของเศษส่วนย่อยจะมีนิพจน์อยู่ในรูป

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

เมื่อ A_1, A_2, …, A_m เป็นค่าคงตัว เช่น

$$\frac{5}{(x-1)(x+2)(\mathrm{x}-3)} =$$

$$\frac{4x^2-1}{(x-1)(x+2)^2} =$$

$$\frac{3x+6}{x^2(x+1)^3(x-2)} =$$

กรณี 2 ถ้าตัวประกอบของ $Q(x)$ มีนิพจน์ $(ax^2+bx+c)^m$ เมื่อ $b^2-4ac < 0$ เป็นตัวประกอบ แล้วผลบวกของเศษส่วนย่อยจะมีนิพจน์อยู่ในรูป

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+...+\frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

เมื่อ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ และ $B_1, B_2, \ldots, B_m$ เป็นค่าคงตัว เช่น

$$\frac{x^2-1}{(x^2+3)(x^2+x+1)} =$$

$$\frac{4x^2+6+1}{(x^2+1)^2(x^2+x+1)} =$$

หมายเหตุ ในบางครั้ง ตัวประกอบของ $Q(x)$ อาจจะมีนิพจน์ $(ax+b)^m$ และนิพจน์ $(ax^2+bx+c)^m$ เมื่อ $b^2-4ac < 0$ เป็นตัวประกอบ เช่น

$$\frac{x^2+x-2}{x^2(3x-1)(x^2+1)^2} =$$

3. **เขียน** $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **ให้อยู่รูปนิพจน์ของผลบวกเศษส่วนย่อย แล้วจึงปริพันธ์ของโดยใช้สูตรและเทคนิคการหาปริพันธ์ที่ได้เรียนมาแล้ว**

ตัวอย่าง จงหา $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-1}\,dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{11-x}{x^2+3x-4}dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x-3)}\,dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{x^2-6x+25}{(x+1)(x-3)^2}\,dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{5x^2+3x+4}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$

วิธีทำ

สำหรับบางกรณี อาจจำเป็นต้องใช้เทคนิคการหาปริพันธ์โดยการแทนค่าก่อน แล้วจึงประยุกต์ใช้เทคนิคการหาปริพันธ์โดยการเขียนให้อยู่รูปผลบวกของเศษส่วนย่อย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x - 6}\,dx$

วิธีทำ

▪ การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้โดยการหารพหุนาม

ถ้า $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ เมื่อ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามที่**ดีกรีของ P มากกว่าหรือเท่ากับดีกรีของ** Q แล้วใน**การหาปริพันธ์เราจะใช้วิธีการจัดรูปตัวถูกหาปริพันธ์โดยการหารพหุนาม**เพื่อเขียน f ให้อยู่ในรูป

$$f(x) = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

โดยที่ $R(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ $\dfrac{S(x)}{Q(x)}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ ก่อนจะนำมาหาปริพันธ์โดยใช้เทคนิคต่างๆ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหา $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$

วิธีทำ